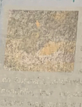
Exercices
Perfectionnement

67 L'invasion des lapins en Australie (Algo)



En 1859, Thomas Austin, un fermier australien, lâche sur ses terres deux douzaines de lapins importés d'Angleterre. Les lapins, sans prédateurs naturels en Australie, se développent de manière exponentielle, leur population doublant tous les [illegible] une terrible crise agricole et écologique.

On modélise le nombre de lapins par une fonction f définie sur $[0\,;7]$ par : $f(t)=ka^t$ où t est le nombre d'années écoulées depuis l'introduction des lapins.

1. » Chercher • Modéliser
a. Déterminer les valeurs de k et de a. Justifier.
b. Déterminer le nombre de lapins un an après leur introduction, puis 6 ans et demi après.

2. » Raisonner • Calculer (Tableur) On utilise une feuille de calcul automatisé pour suivre cette modélisation mois par mois.

	A	B	C	D	E	F
1	t	0				
2	f(t)					

a. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule **C1**, que l'on pourra recopier vers la droite, pour afficher les valeurs de t correspondant aux différents mois ?
b. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule **B2** et recopier vers la droite ?

3. » Modéliser • Calculer Combien de mois après leur introduction la population de lapins dépassera-t-elle les 10 000 individus ?

68 Abonnement à un site Internet

Un site Internet comptait 46 400 abonnés le 1er septembre 2018 et 51 156 abonnées le 1er septembre 2020.

1. » Calculer Déterminer le taux de croissance annuel moyen du nombre d'abonnés de 2018 à 2020.

2. Le directeur du site suppose que la croissance va se poursuivre au même rythme et décide de modéliser le nombre d'abonnés par une fonction du type $x \mapsto ka^x$ où x est le nombre d'années écoulées depuis le 1er septembre 2020.
a. » Modéliser Déterminer les valeurs de k et a.
b. » Raisonner Donner la valeur de $f(-2)$ sans utiliser de calculatrice.
c. » Modéliser Déterminer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés prévu le 25 décembre 2020.
d. » Représenter Déterminer, à l'aide de la calculatrice graphique, à quelle date le nombre d'abonnés dépassera les 60 000 selon ce modèle.

69 Résolution numérique d'équation (Python)

En langage Python, la fonction resoudre ci-dessous renvoie un encadrement de la solution de l'équation $a^x=b$ sur un intervalle $[x_1\,;x_2]$.

```
def resoudre(a, b, x1, x2):
    h = (x2 - x1)/100
    x = x1
    if a > 1:
        while a**x < b:
            x = x + h
    else:
        while a**x > b:
            x = x + h
    return x - h, x
```

Tester en environnement Python avec le fichier C02_Ex.69.

1.a. » Raisonner Pourquoi doit-on utiliser l'instruction « if a > 1: » ?
b. » Raisonner Lors d'un appel de cette fonction, on obtient :

```
>>> resoudre(2,10,0,10)
(3.3000000000000016, 3.4000000000000017)
```

Quelle équation souhaitait-on résoudre et sur quel intervalle ?

2. » Chercher Quelle instruction appelant la fonction **resoudre** permet alors d'obtenir des résultats plus précis ?

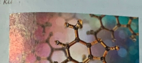
3.a. » Raisonner • Communiquer Décrire le fonctionnement de la fonction suivante.

```
def resoudrebis(a,b,x1,x2):
    while x2 - x1 > 10**-10:
        x1, x2 = resoudre(a, b, x1, x2)
    return x1, x2
```

b. Modifier la fonction **resoudre** afin qu'elle renvoie un encadrement de la solution de l'équation $x^a=b$ sur un intervalle $[x_1\,;x_2]$.

70 Caffeine in the human body (In English)

The human body eliminates caffeine at a rate of 11% per hour. Therefore, the amount of caffeine in the body x hours after drinking a cup of coffee can be modelled by the function: $c(x)=ka^x$.



1. » Modéliser • Raisonner • Communiquer Find the values of k and a after someone drinks a cup of coffee containing 152 mg of caffeine. Explain your answer.
2. » Calculer How much caffeine is left in the body two hours and a half after drinking the cup?
3. » Représenter • Calculer Find the half-life of caffeine, meaning how long it takes to eliminate half of the caffeine. Give the result in hours and minutes.

71 Indonésie *versus* États-Unis

En 2016, l'Indonésie compte 264 905 894 habitants et les États-Unis 327 163 096 habitants. Le taux de croissance annuel de la population indonésienne est de 1,3 % contre 0,8 % aux États-Unis.

» Chercher • Modéliser • Représenter • Raisonner • Calculer • Communiquer
Si ces croissances se maintiennent, en quelle année l'Indonésie aura-t-elle plus d'habitants que les États-Unis ?

72 Action d'un antibiotique

On prélève du sang sur un patient souffrant d'une infection bactérienne. Les bactéries, trop petites, sont indétectables dans le sang et on les met en culture pendant 24 h.

1. On observe une phase de latence de 12 h pendant laquelle les bactéries s'adaptent au milieu, suivie d'une phase de croissance exponentielle de 12 h durant laquelle le nombre de bactéries par mL de sang est modélisé par une fonction f définie sur $[12\,;24]$ par : $f(x)=0{,}008\times2{,}8^x$.
a. » Raisonner Justifier que la fonction f est croissante.
b. » Modéliser • Calculer Déterminer la concentration de bactéries dans la culture au bout de 2 h 30 de croissance exponentielle, puis à la fin de la phase de culture.

2. Après 24 h de culture, ayant détecté une infection au *Staphylococcus aureus*, on introduit un puissant antibiotique. On admet que la concentration de bactéries, en milliers de bactéries par mL, est alors modélisée par la fonction g définie sur $[24\,;42]$ par : $g(x)=-1\,613x^2+82\,633x-622\,702$.
a. » Raisonner • Calculer Étudier les variations de la fonction g. Au bout de combien de minutes après l'introduction de l'antibiotique la population de bactéries commence-t-elle à diminuer ?
b. » Modéliser • Raisonner L'antibiotique est jugé bien dosé s'il tue au moins 99 % des bactéries en 18 h. Cet antibiotique est-il bien dosé ?
c. » Représenter Représenter sur un graphique l'évolution de la population de bactéries durant les trois phases : latence ; croissance exponentielle ; élimination.

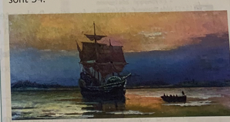
73 Croissance d'une population (Python)

Une population de p_0 habitants augmente à un taux annuel de 5 %. Une fois qu'elle a doublé, elle n'augmente plus qu'à un taux de 2 %.

» Modéliser • Représenter • Raisonner
Écrire une fonction Python telle que la commande **population**(p0, n) renvoie la population au bout de n jours.

74 À la conquête du Nouveau Monde

D'un navire parvenu au Nouveau Monde débarquent 4 souris. Un an après, les souris, qui se reproduisent de manière exponentielle, sont 34.



» Chercher • Modéliser • Raisonner • Calculer • Communiquer
Combien de souris seront présentes deux ans et demi après le débarquement ?

Être prêt pour le BAC
E3C

» Compétences mobilisées

Exercices	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Communiquer
76	B.2.a	B.1	A.4	A.3 et B.2	A.1 et A.2	B.2.c
77		B		A.3 et B.2	A	
78	B.2	A.1 et A.3	B.1	A.4 et B.2	A.1	A.2 et A.4

Première partie (à traiter sans calculatrice)

Automatismes

75 Questions flash

Q1. [illegible]
Q2. [illegible]
Q3. [illegible]
Q4. Simplifier : [illegible]
Q5. Déterminer le sens de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$x\mapsto 0{,}2\times1{,}02^x.$$
Q6. Déterminer le sens de variation de la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$t\mapsto -\frac{7}{5}\times\left(\frac{8}{5}\right)^t.$$
Q7. Résoudre l'équation : $x^{0{,}25}=3$.
Q8. Résoudre l'équation : $x^{0{,}5}=7$.
Q9. Quel est le taux global d'augmentation équivalent à deux hausses de 20 % ?
Q10. Quel est le taux d'évolution moyen correspondant à une hausse de 80 % suivie d'une baisse de 20 % ?

Seconde partie (calculatrice autorisée)

76 Dérivées & Fonctions exponentielles

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;15]$ par :
$$f(x)=-0{,}16x^3+2{,}22x^2-3{,}784\,8x+30.$$

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;15]$.
2. Vérifier que :
$$f'(x)=(x-8{,}3)(-0{,}48x+0{,}456).$$
3. Étudier le signe de la dérivée f' puis les variations de f.
4. Donner le maximum de la fonction f sur $[0\,;15]$ (arrondi à l'unité) et la valeur pour laquelle il est atteint.

Partie B

On s'intéresse à l'évolution de la quantité d'antigènes, d'une part, et de la quantité d'anticorps, d'autre part, présents dans le sang d'une personne infectée par des bactéries pathogènes, dans les jours qui suivent la contamination.
On admet que :
- la quantité d'antigènes présents dans le sang en UA (unité arbitraire) en fonction du temps (en jour) écoulé depuis la contamination est représentée par la fonction f, étudiée dans la partie A ;
- la quantité d'anticorps dans le sang en UA en fonction du temps (en jour) écoulé depuis la contamination est représentée par la fonction g définie sur $[3\,;15]$ par : $g(x)=0{,}009\times1{,}89^x$.

La personne est considérée comme guérie lorsque la quantité d'anticorps présents dans le sang est supérieure à la quantité d'antigènes présents dans le sang.

1.a. Quelles quantités d'antigènes et d'anticorps sont présentes dans le corps 6,5 jours après la contamination ? Arrondir à l'unité.
b. Au bout de combien de temps la quantité d'antigènes est-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité en UA ?

2. (Python) On décide d'utiliser un programme Python pour déterminer le temps de guérison.
a. Écrire les fonctions **antigene**(x) et **anticorps**(x) renvoyant les quantités d'antigènes et d'anticorps présentes dans le corps au bout de x jours.
b. Compléter la fonction **estgueri**, qui détermine, par balayage, au bout de combien de jours la personne est guérie.

```
def estgueri(h):
    x = 3
    while ............... :
        x = x + h
    return x
```

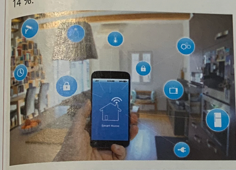
c. Quelle valeur peut-on prendre pour h afin de déterminer au bout de combien de temps, à une heure près, la personne sera considérée comme guérie ? Justifier ce choix.
d. Déterminer le temps de guérison, à une heure près.

D'après un sujet de bac.

77 Suites & Fonctions exponentielles

Partie A

En 2015, l'IDATE (Institut de l'audiovisuel et des télécommunications en Europe) estimait à 42 milliards le nombre d'objets connectés dans le monde avec une prévision de croissance de 14 % par an jusqu'en 2025.
On considère la suite (u_n) où u_n modélise le nombre d'objets connectés (en milliards) au 1er décembre $(2015+n)$, n désignant un entier naturel. On admet que $u_0=42$ et que le nombre d'objets connectés augmente chaque année de 14 %.

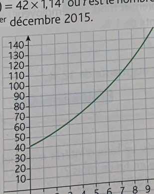


1. Calculer u_1 et u_2. Arrondir à 0,001. Interpréter ces deux résultats.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire une estimation du nombre d'objets connectés en 2025.
4. Ce modèle peut-il être prolongé raisonnablement jusqu'en 2050 ? Justifier la réponse.

Partie B

Pour estimer à n'importe quel instant t le nombre de milliards d'objets connectés, on admet qu'on peut modéliser ce nombre par la fonction g définie sur $[0\,;10]$ par : $g(t)=42\times1{,}14^t$ où t est le nombre d'années après le 1er décembre 2015.

La courbe représentative de la fonction g est donnée ci-contre.



1. Par lecture graphique, déterminer :
a. le nombre d'objets connectés au bout de 4 ans et demi ;
b. au bout de combien de temps le nombre d'objets connectés dépasse les 100 milliards.
2. Déterminer avec précision le mois au cours duquel le nombre d'objets connectés atteint 150 milliards.

78 Pourcentages & Fonctions exponentielles

Partie A

Le tableau suivant, extrait d'une feuille automatisée de calcul, fournit le nombre d'abonnements à Internet en très haut débit, en France, du premier trimestre 2015 au premier trimestre 2017. La plage de cellules C3:E3 est au format pourcentage arrondi à l'unité.
Tester sur tableur avec le fichier C02_Ex.78.

	A	B	C	D	E
1	Trimestre	T1 2015	T1 2016	T1 2017	T1 2018
2	Abonnements (en millions)	3,56	4,5	5,84	7,5
3	Taux de croissance annuel				

1. (Tableur) Choisir, parmi les propositions suivantes, la formule à saisir dans la cellule C3 d'un tableur afin d'obtenir par recopie vers la droite les taux d'évolution annuels des abonnements à Internet très haut débit :
=(C2–B2)/C2 =(C2–B2)/B2
=(C2–B2)/B2 =(B2–C2)/C2
2. Quelle est la valeur affichée dans la cellule **E3** ?
3. Calculer à 0,1 % près le taux de croissance annuel moyen du nombre d'abonnements à internet en très haut débit du premier trimestre 2015 au premier trimestre 2018.

Partie B

On admet que le nombre d'abonnements, (en millions), en France à Internet très haut débit du 1er mars 2015 au 1er mars 2020, est modélisé par la fonction définie sur $[0\,;5]$: $f(x)=3{,}56\times1{,}282^x$ où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er mars 2015.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnements au 1er septembre 2018 au millier près.
2. À quelle date le nombre d'abonnements dépassera-t-il 10 millions ?

D'après un sujet de bac.